FONCTIONS - *Généralités*

Prof : idir rachid

Leçon : FONCTIONS - Généralités
Présentation globale

I) Définitions et Domaine de définitions

1°) Définitions

Définition : Une ***fonction*** est une relation qui a un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y

On note : x $\overset{f}{\mapsto}$ y ou encore $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

2)Exemples :

Exemple 1: Soit Les fonctions numériques suivants :

$f(x) = x^2 + 2x - 5$ $g(x) = \dfrac{3x^3+2x^2-1}{5x^2-4}$.

; $h(x) = \dfrac{2x-1}{5x-4}$; $l(x) = \sqrt{x}$; $R(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\tan x}$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique :Une fonctions homographique s'écrit sous la forme : $h(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple 2: Soit la fonction f définie par , $f(x) = 3x^2 - 1$

1)Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par *f*.
2)Déterminer les antécédents éventuels de 2 par *f*,

Réponses : 1) $f(1) = 3\times1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ et

$f(\sqrt{2}) = 3\times(\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 4$

$f(-1) = 3\times(-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

2) $f(x) = 2$ ssi $3\times x^2 - 1 = 2$

ssi $3\times x^2 = 2+1$ ssi $3\times x^2 = 3$ ssi $x^2 = 1$

ssi $x = -1$ ou $x = 1$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

3°) Domaine de définitions

ACTIVITES :

a. On considère la fonction définie par : $x \overset{f}{\mapsto} \dfrac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie par : $x \overset{g}{\longmapsto} \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie par : $x \overset{h}{\longmapsto} \dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Définition : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D_f

Exemple : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$. 3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x)=\sqrt{-2x^2+x+3}$. 14) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$.

15) $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$. 16) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{2x+4}$.

17) $f(x)=3x^2-\dfrac{1}{x}+\sqrt{-x}$. 18) $f(x)=\dfrac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.

19) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$. 20) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

21) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$.

Solutions

1) $f(x)=3x^2-x+1$ f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\dfrac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\dfrac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ ssi $x^2-2^2=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\dfrac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ ssi $x(x^2-2)=0$ ssi $x=0$ ou $x^2-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^2=2$ ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ ssi $x\leq 2$ ssi $x\leq\dfrac{-6}{-3}$ ssi $-3x\geq -6$

Donc $D_f=]-\infty;2]$

6) $f(x)=\dfrac{x-5}{2x^2-5x-3}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$ $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{7+5}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ et $x_2=\dfrac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times 2}=\dfrac{5-7}{4}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq 0\}$ soit Δ son discriminant

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$ $a=2$

$x_1=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{4}{4}=1$ et $x_2=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f=\left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

8) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-9x+3}{x+1}\geq 0 et x+1\neq 0\right\}$

$-9x+3=0$ ssi $x=\dfrac{1}{3}$ ssi $-9x=-3$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = \left]-1, \frac{1}{3}\right]$

9) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / -2x^2+x+3 > 0 \right\}$

$-2x^2+x+3=0 \quad a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta = b^2-4ac = (1)^2 - 4\times(-2)\times 3 = 1+24 = 25 = (5)^2 > 0$

Donc on a deux racines

$x_1 = \dfrac{-1+5}{2\times(-2)} = \dfrac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2\times(-2)} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$

10) $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x^2+1}$. $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0 \right\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

11) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

Or on sait que $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 et x-1 \neq 0 \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq -2 et x \neq 1 \right\}$

$D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$

17) $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x} + \sqrt{-x}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 et x \neq 0 \right\}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \leq 0 et x \neq 0 \right\}$ donc : $D_f =]-\infty, 0[$

18) $f(x) = \dfrac{x}{|2x-4| - |x-1|}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0 \right\}$

$|2x-4| - |x-1| = 0$ ssi $|2x-4| = |x-1|$

ssi $2x-4 = x-1$ ou $2x-4 = -(x-1)$

ssi $2x-x = 4-1$ ou $2x-4 = -x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x = 4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\dfrac{5}{3}$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$

19) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{2\cos x - 1}$. $\quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / 2\cos x - 1 \neq 0 \right\}$

$2\cos x - 1 = 0$ ssi $\cos x = \dfrac{1}{2}$

$\cos x = \dfrac{1}{2}$ ssi $\cos x = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

$x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc: $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi ; \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

20) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0 et x^2-x-6 \neq 0 \right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:
Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6 :
Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$ et ses racines sont :

$x_1' = \dfrac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1} = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $x_2' = \dfrac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1} = \dfrac{1+5}{2} = 3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$	

$D_f = \left[\dfrac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2 \right[\cup \left] 3; \dfrac{1+3\sqrt{3}}{2} \right]$.

21) $f(x) = \sqrt{x^2 + \left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{6}}$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 + \left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{6} \geq 0 \right\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - 4\times 1\times 2\sqrt{6}$

$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$

$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2} = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2$

$14 + 4\sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$ donc

$x_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times 1} = \dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

et $x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1 = \dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ et

$x_2 = \dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1} = \dfrac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f = \left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

II) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

1)Egalité de deux fonctions

Définition : Soient f et g deux fonctions, et D_f et D_g leurs domaines de définition respectifs
on dit que f et g sont égaux et on écrit f=g.
si et seulement si :

$D_f = D_g$ et pour tout $x \in D_f$ (ou $x \in D_g$) on a f(x)=g(x)

Exemple 1 : Soient les deux fonctions :

$f(x) = \dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x) = \dfrac{1+3x^2}{|x|}$

- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

or on sait que $x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $|x| \neq 0$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

alors $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2} = |x|$ et $3x^2+1 = 1+3x^2$ donc f(x)=g(x)

donc finalement on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et f(x)=g(x) donc : f=g.

Exemple 2 : Soient les deux fonctions :

$h(x) = \dfrac{x^2-x}{x}$ et $t(x) = x-1$

- on a $h(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$
- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t = \mathbb{R}$

alors $D_h \neq D_t$ donc : $h \neq t$

2) Représentations graphique

Dans ce paragraphe le plan est rapporté a un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

Définition : Soit f une fonction , et D_f son domaine de définition
l'ensemble des points M $(x, f(x))$ forme la courbe représentative de la fonction f, souvent notée C_f .

$C_f = \left\{M\left(x, f(x)\right) / x \in D_f\right\}$

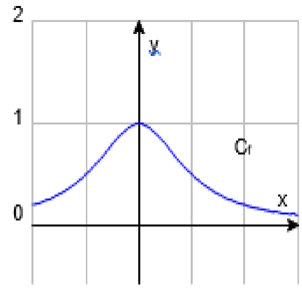
Méthode :
Pour tracer la courbe représentative de la fonction On calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

Exemple 1 : Tracer la représentation graphique de la fonction f tq : $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Sur I un l'intervalle $I = [-2;3]$

Réponses :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1



Exemple 2 : la courbe représentative d'une fonction affine f ($f(x) = ax+b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est une droite d'équation $y = ax+b$

Exemple 3 : Soie f une fonction tq : $f(x) = |2x+3|$

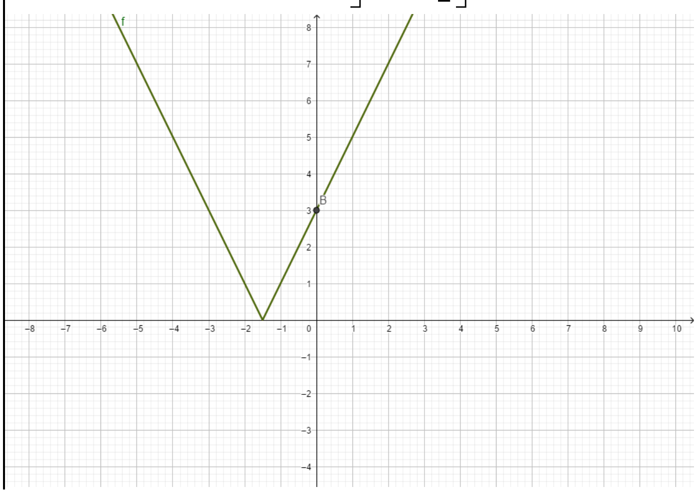
- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

x		$\frac{-3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	0	$+$
$\lvert 2x+3\rvert$	$-2x-3$		$2x+3$

$2x+3=0$ ssi $x = \dfrac{-3}{2}$

Donc $f(x) = 2x+3$ si $x \in \left[-\dfrac{3}{2},+\infty\right[$

$f(x) = -2x-3$ si $x \in \left]-\infty,-\dfrac{3}{2}\right]$



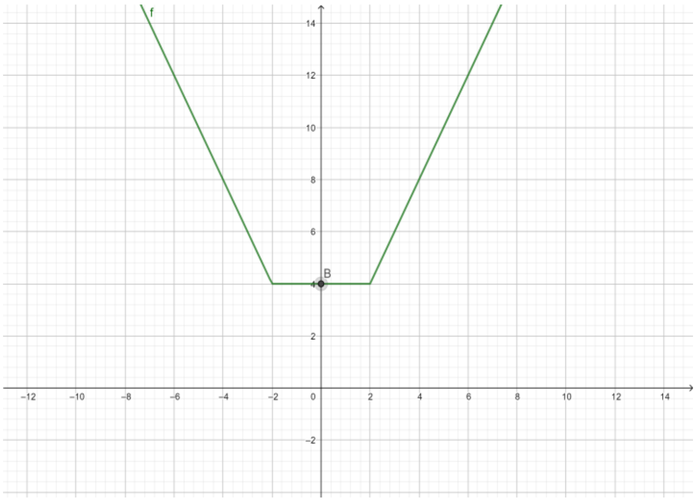
Exemple 4: Soie f une fonction tq : $f(x)=|x-2|+|x+2|$

- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$x+2=0$ ssi $x=-2$
$x-2=0$ ssi $x=2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$ 0	$+$	
$\lvert x-2\rvert$	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	
$x+2$	$-$ 0	$+$	$+$	
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	
$\lvert x-2\rvert+\lvert x+2\rvert$	$-2x$	4	$2x$	

Donc $f(x)=-2x$ si $x\in]-\infty,-2]$ et $f(x)=4$ si $x\in[-2,2]$ et $f(x)=2x$ si $x\in[2,+\infty[$

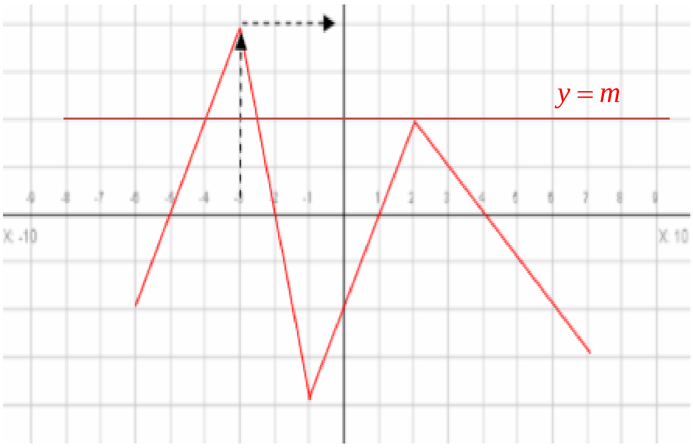


Exemple 5 : La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6;7]$

Soie f une fonction

Questions : Répondre par lecture graphique :

1- Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
3- Résoudre graphiquement $f(x)=0$
4- Quel est, en fonction de m , le nombre de solutions de $f(x)=m$
5- Résoudre graphiquement $f(x)\prec 0$
6- Résoudre graphiquement $f(x)\geq 2$



Réponses : 1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5) Image de -3 est 4
Image de 0 est -2 Image de 6 est -2
2) Antécédents de -1 sont : -5,5 -1,75 0,5 et 5
Antécédents de 0 sont : -5 -2 1 et 4
3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 :
$S=\{-5;-2;1;4\}$

4)Nombre de solutions de $f(x)=m$ C'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m\prec -4$: pas de solution
Si $m=-4$: une solution
Si: $-4\prec m\prec -3$ deux solutions
Si $-3\prec m\prec -2$: trois solutions
Si $-2\prec m\prec 2$: quatre solutions
Si $m=2$: trois solutions
Si: $2\prec m\prec 4$ deux solutions
Si $m=4$: une solution
Si $m\succ 4$: pas de solution

5) $f(x)\prec 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses.
$S=[-6;7]\cup]-2;1[\cup]4;7]$

6) $f(x)\geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y=2$ donc $S=[-4;2.5]\cup\{2\}$

III) Fonctions paires et Fonctions impaires

1. Définitions :

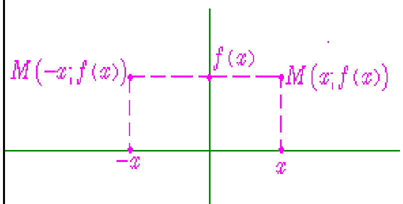
a. Ensemble de définition centré

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition.

On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et et seulement si :Pour tout réel *x*, si $x\in D_f$, alors $-x\in D_f$.

b. Fonction paire

On dit qu'une fonction *f* est paire si et seulement si :
1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel *x* de D_f, on a : $f(-x)=f(x)$



Remarques :

- si *n* est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x)=kx^n$ est paire.

(C'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)

- la fonction $x\mapsto |x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x\mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,

- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

c. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

- si n est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,
- la fonction $x \to \tan x$ est impaire,
- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Exemples : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 - 5$

f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$
  $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \dfrac{3}{x}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $g(-x) = \dfrac{3}{-x} = -\dfrac{3}{x}$
  $g(-x) = -g(x)$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x) = 2x^3 + x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$
  $h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x) = \dfrac{x}{x-2}$

on a $t(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x - 2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_t = \mathbb{R} - \{2\}$

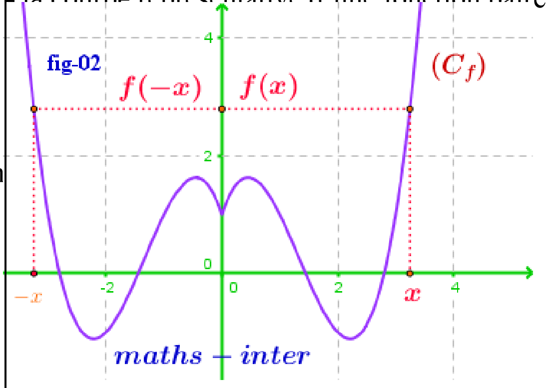
on a $-2 \in D_t$ mais $-(-2) = 2 \notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport a O

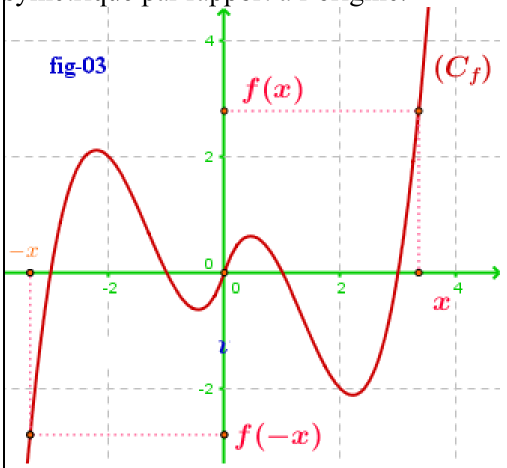
Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

2. le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique



- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



Application :

Etudier la parité des fonctions suivantes définie par

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2-1}$ 4) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ 5) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+5}$.

6) $f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4}$. 7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

<u>**Solutions**</u>

1) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$
- $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\dfrac{x^2-1}{x}$
  $f(-x) = -f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

- $f(-x)=(-x)^2+\frac{1}{-x}=x^2-\frac{1}{x}=\left(-x^2+\frac{1}{x}\right)$

$f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- $f(-x)=\frac{|-x|}{(-x)^2-1}=\frac{|x|}{x^2-1}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$

- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

5) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=\frac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\frac{-2x^3}{x^2+5}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ donc $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

6) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$ Donc

$D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

IV) Les variations d'une fonction numérique

1) Sens de variation d'une fonction :fonction croissante -décroissante -fonction constantes

Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1\prec x_2$ alors $f(x_1)\prec f(x_2)$ $\left(f(x_1)\leq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1\prec x_2$ alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ $\left(f(x_1)\geq f(x_2)\right)$

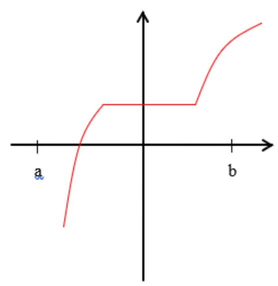
Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que :

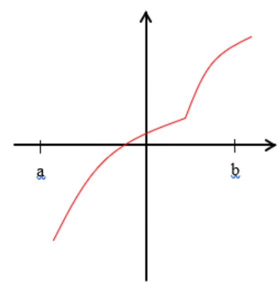
Si $x_1\in I$ et $x_2\in I$ tq $x_1\prec x_2$ alors $f(x_1)=f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Fonction croissante sur $[a,b]$, mais non strictement croissante



Fonction strictement croissante sur $[a,b]$

Exemples : 1) Soit f une fonction tq : $f(x)=7x-5$

f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tq $x_1\prec x_2$

Donc $7x_1\prec 7x_2$ car $7\succ 0$

Donc $7x_1-5\prec 7x_2-5$

Alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$ tq $x_1 \prec x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$ tq $x_1 \prec x_2$

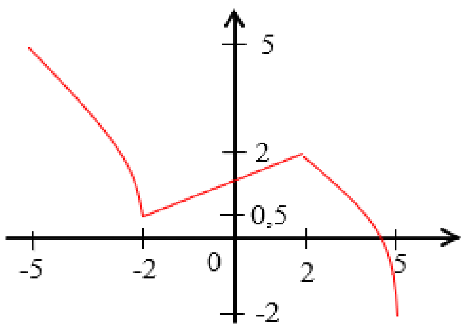
Donc $\frac{1}{x_1} \succ \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} \succ \frac{2}{x_2}$ car $2 \succ 0$

Alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b) **tableau de variation :**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

3)



x	-5		-2		2		5
$f(x)$	5	$\searrow$	$0,5$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$

pour tout $x \in I$

2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a)Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1;x_2)$ est tq : $T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Exemple : Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1;x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1;x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0\right)$
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\right)$
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

Exemples : 1)Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2)$

a)Soit $x_1 \in [0;+\infty[$ et $x_2 \in [0;+\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0;+\infty[$

b)Soit $x_1 \in]-\infty;0]$ et $x_2 \in]-\infty;0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty;0]$

b) <u>résumé</u> : **tableau de variation :** $f(0)=3\times0^2+2=2$

x	$-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$
$f(x)$	↘ 2 ↗

2)Soit f une fonction tq : $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$

on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x+1\neq0$ ssi $x\neq-1$

Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

soient $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tq $x_1\neq x_2$

on a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a)sur $I=]-\infty;-1[$

Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec-1$ et $x_2\prec-1$ Donc $x_1+1\prec0$ et $x_2+1\prec0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ0$ Donc

$T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ0$ sur $I=]-\infty;-1[$

d'où g que est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b)sur $J=]-1;+\infty[$

Soit $x_1\in]-1;+\infty[$ et $x_2\in]-1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ-1$ et $x_2\succ-1$ Donc $x_1+1\succ0$ et $x_2+1\succ0$ Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ0$ Donc

$T(x_1;x_2)=\dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ0$ sur $J=]-1;+\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur $J=]-1;+\infty[$

c) <u>résumé</u> : **tableau de variation :**

x	$-\infty$ $\quad -1$	$+\infty$
$f(x)$	↗ ||	↗

c) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Conséquences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Applications: Soit f une fonction tq : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

1)Déterminer D_f et étudier la parité de f

2)Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1\neq x_2$

3)Étudier les variations de f sur $I=]0;1]$ puis sur $J=[1;+\infty[$

4)En déduire les variations de f sur D_f

5)Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq0$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-x-\dfrac{1}{x}=-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

  $f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

2) $f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)-\left(x_2+\dfrac{1}{x_2}\right)=x_1+\dfrac{1}{x_1}-x_2-\dfrac{1}{x_2}$

$$=\frac{x_1^2\times x_2+x_2-x_2^2\times x_1-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{x_1\times x_2(x_1-x_2)+x_2-x_1}{x_1\times x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(x_1\times x_2-1)}{x_1\times x_2}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}$$

a)sur $I=]0;1]$

Soit $x_1\in]0;1]$ et $x_2\in]0;1]$

Donc $0\prec x_1\leq1$ et $0\prec x_2\leq1$ $x_2+1\prec0$

Donc $0\prec x_1x_2\leq1$ et $x_1\neq x_2$ Donc $x_1x_2-1\prec0$ et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\prec0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I=]0;1]$

b)sur $J=[1;+\infty[$

Soit $x_1\in[1;+\infty[$ et $x_2\in[1;+\infty[$

Donc $x_1\geq1$ et $x_2\geq1$ Donc $x_1x_2\geq1$ et $x_1\neq x_2$

Donc $x_1x_2\succ1$ Donc $x_1x_2-1\succ0$

et on a $0\prec x_1x_2$ Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{x_1\times x_2-1}{x_1\times x_2}\succ0$

d'où f que est strictement croissante sur $J=[1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I=]0;1]$ est l'intervalle $I'=[-1;0[$ et le symétrique de $J=[1;+\infty[$ est l'intervalle $J'=]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I Donc f est strictement décroissante sur I'

f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

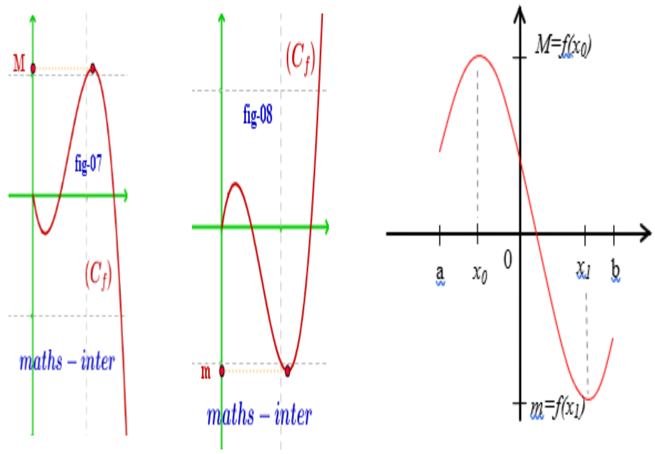
$f(x)=1+\frac{1}{1}=2$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$	$\nearrow$	-2	$\searrow$ ‖ $\searrow$	2	$\nearrow$

$f(-1)=-1-\frac{1}{1}=-2$

V) Les extremums d'une fonction numérique

1)Définitions :



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a\in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout que $x\in I$: $f(x)\le f(a)$
- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x\in I$: $f(x)\ge f(a)$

2)Exemples

1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x)=5x^2+3$

$D_f=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\ge 0$ Donc $5x^2\ge 0$ car $5\succ 0$

Par suite $5x^2+3\ge 3$ et on a $f(0)=3$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\ge f(0)$

d'où $f(0)=3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

2° Soit g une fonction numérique tq : $g(x)=-4x^2+1$

$D_g=\mathbb{R}$ et On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\ge 0$

Donc $-4x^2\le 0$ car $-4\prec 0$

Par suite $-4x^2+1\le 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\le g(0)$

d'où $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

3)Propriétés :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I=[a;b]$ (a et b dans $\mathbb{R}$) et soit $c\in I$

- Si f est croissante sur $[a;c]$ et décroissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur maximale de f sur I
- Si f est décroissante sur $[a;c]$ et croissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale de f sur I

x	a	c	b
$f(x)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

x	a	c	b
$f(x)$	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

Application : Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=-4x^2+4x+5$

1°a) montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) montrer que $f(x)\le 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Reponses: 1°a) on a $D_f=\mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2=6-(4x^2-4x+1)$

$=6-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+5$

Donc : $f(x)=6-(2x-1)^2$

b) Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a $(2x-1)^2\ge 0$

Par suite $-(2x-1)^2\le 0$ donc $6-(2x-1)^2\le 6$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\le 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $6-(2x-1)^2\le 6$ alors

$f(x)\le f\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$